ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 534

Сейфуллаев Ф.А.
научный сотрудник

Институт математики и механики
Национальная академия наук Азербайджана
Республика Азербайджан, г. Баку

Мусаев Дж.Е.
научный сотрудник

Азербайджанский архитектурно-строительный университет
Республика Азербайджан, г. Баку

КОЛЕБАНИЯ ПОПЕРЕЧНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖИДКОСТЬЮ В ЖИДКОСТИ

В работе рассматривается задача о поперечных колебаниях неоднородной цилиндрической оболочки кругового поперечного сечения, лежащей на линейно вязко упругом основании. Предполагается, что модуль упругости и плотность являются непрерывными функциями координаты толщины.

Для случая, когда торцы оболочки свободно опираются при конкретных видах неоднородности, проведен численный анализ. Результаты расчета представлены в виде таблицы и графика зависимости между безразмерной величиной частоты и параметром неоднородности.

Ключевые слова: *оболочка, неоднородность, сечение, упругость, вязкость, основание, модуль, прогиб.*

В предлагаемой статье исследованы свободные колебания поперечно подкрепленной цилиндрической ортотропной оболочки в идеальной жидкости, заполненной вязкой жидкостью. Для описания движения внутренней вязкой жидкости используется линеаризованное уравнение Навье-Стокса, а движение внешней идеальной жидкости описывается волновым уравнением, написанным в потенциале по возмущённой скорости. Частотное уравнение продольно подкрепленной ортотропной оболочки, контактирующей с вязкой жидкостью, получено на основе принципа стационарности действия Остроградского-Гамильтона. Построены характерные кривые зависимости.

В работе [1] исследовано свободное колебание ортотропной подкрепленной кольцевыми ребрами, неоднородной по толщине цилиндрической оболочки, контактирующей с грунтом. Используя вариационный принцип Гамильтона-Остроградского, построена система уравнения движения подкрепленной кольцевыми ребрами, неоднородной по толщине ортотропной цилиндрической оболочки, контактирующей с грунтом. Для учета неоднородности материала оболочки по толщине принимается, что модуль Юнга и плотность материала оболочки являются функциями нормальной координаты. Используя вариационный принцип Гамильтона-Остроградского, построены частотные уравнения и реализованы численно. В процессе вычислений для функции неоднородности приняты линейные и параболические законы. Построены характерные кривые зависимости.

Работа [2] посвящена исследованию одной из динамических прочностных характеристик – частоты собственных колебаний, подкрепленной кольцевыми ребрами неоднородной ортотропной цилиндрической оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье, с протекающей жидкостью. Результаты вычислений собственных частот колебаний представлены в виде зависимости от скорости протекающей жидкости, от числа подкрепляющих элементов при различных значениях параметров волнообразования и различных отношениях модулей упругости.

В работе [3] представлены результаты нахождения частот свободных колебаний подкрепленной кольцевыми ребрами цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье, с протекающей жидкостью. Результаты вычислений собственных частот колебаний представлены в виде зависимостей от угла намотки стекловолокна для оболочки из тканевого стеклопластика и от скорости протекающей жидкости при различных значениях параметров волнообразования и различных отношений между параметрами, характеризующими геометрические размеры оболочки.

При строительстве мостов используются опоры [4], образованные комбинацией цилиндрических панелей. Для экономии материала внутреннюю часть опоры засыпают грунтом. Такие опоры подвергаются воздействию сил различной природы. Одна из таких сил – сила, возникающая на поверхности цилиндрических панелей, образующих опоры во время паводкового потока. Под действием этих сил опора подвергается вынужденной вибрации. Таким образом, для изучения опор, сформированных из комбинации цилиндрических панелей, с учетом вязкости и неоднородности грунта, ортотропность панелей имеет большое практическое значение.

В работе [5] на основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского исследуются вынужденные колебания вертикальной подпорной стенки, состоящей из трех ортотропных цилиндрических панелей, контактирующих с вязко-упругим неоднородным грунтом, получены аналитические выражения для вычисления смещения точек цилиндрических панелей и построены характерные кривые. Учет неоднородности грунта осуществляется путем принятия его коэффициентов жесткости как функции координаты. Предполагается, что коэффициент Пуассона постоянный.

В работе [6] исследуются свободные колебания ортотропной, усиленной в поперечном направлении, заполненной идеальной жидкостью цилиндрической оболочки, неоднородной по толщине и по окружности. На основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского построены системы уравнений движения ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной идеальной жидкостью, усиленной по окружности.

Рассматривается свободное колебание поперечно подкрепленной, заполненной вязкой жидкостью цилиндрической оболочки в бесконечной идеальной жидкости. Уравнение движения цилиндрической оболочки с жидкостью в жидкости получены на основе принципа стационарности действия Остроградского-Гамильтона:

$$\delta W = 0 \,, \tag{1}$$

где $W = \int_{t'}^{t''} \Pi dt$ – действие по Гамильтону,

t' и t'' – заданные произвольные моменты времени.Здесь

$$\Pi = A_0 + \sum_{j=1}^{k_2} A_j + A_m + A_n \,, \tag{2}$$

где A_0 – полная энергия цилиндрической оболочки;

A_j – полная энергия *j*-го поперечного стержня;

k_2 – количество поперечных ребер;

A_mи A_n — соответственно потенциальные энергии внешних поверхностных нагрузок, действующих со стороны идеальной и вязкой жидкости, приложенных к оболочке, определяются как работа, совершаемая этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное и представляется в виде:

$$A_m = -R \int_0^l \int_0^{2\pi} q_{zm} w dx d\theta \,. \tag{3}$$

$$A_n = -R \int_0^l \int_0^{2\pi} \left(q_x u + q_y \vartheta + q_z w\right) dx d\theta \,. \tag{4}$$

Здесь q_x, q_y, q_z – интенсивность нагрузки, действующая на оболочку со стороны вязкой жидкости;

q_{zm} — интенсивность нагрузки, действующая на оболочку со стороны идеальной жидкости;

l — длина оболочки.

Выражения для A_0иA_j имеют вид [8]:

$$A_0 = \frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2} f_1(z)dz \iint \{\tilde{b}_{11}\, \varepsilon_{11}^2 + 2\tilde{b}_{12}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \tilde{b}_{22}\varepsilon_{22}^2 + \tilde{b}_{66}\varepsilon_{12}^2\} f_2(x)dxdy +$$

$$+ \int_{-h/2}^{h/2} f_1(z)\, dz \iint (\tilde{\rho} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right) f_2(x)dxdy \,. \tag{5}$$

$$\Pi_j = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi R} \left[\tilde{E}_j F_j \left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial y} - \frac{w_j}{R}\right)^2 + \tilde{E}_j J_{yj}\left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{w_j}{R^2}\right)^2 + \right. \tag{6}$$

$$\left. + \tilde{E}_j J_{zj}\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} - \frac{\varphi_{kpj}}{R}\right)^2 + \tilde{G}_j J_{kpj}\left(\frac{\partial \varphi_{kpj}}{\partial y} + \frac{1}{R}\frac{\partial u_j}{\partial y}\right)\right] dy +$$

$$+ \rho_j F_j \int_0^{2\pi R}\left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_j}{\partial t}\right)^2 + \frac{J_{kpj}}{F_j}\left(\frac{\partial \varphi_{kpj}}{\partial t}\right)^2\right] \mathrm{dy}.$$

В выражениях (5) и (6) $\varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$; $\varepsilon_{22} = \dfrac{\partial \vartheta}{\partial y} + w$;$\varepsilon_{12} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x}$.$\tilde{b}_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}\tilde{b}_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}$; $\tilde{b}_{12} = \frac{\nu_1 E_1}{1-\nu_1\nu_2} = \frac{\nu_2 E_2}{1-\nu_1\nu_2}$; $\tilde{b}_{66} = G$ —основные модули упругости однородного ортотропного материала оболочки,смещение точек оболочки, $\tilde{\rho}$ – плотность материала однородной оболочки, $f_1(z), f_2(x)$ —функции неоднородности в направлении по нормали и по образующей оболочки соответственно [7], ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона и E_1,E_2 — модули Юнга материала оболочки в координатных направлениях осей x, y соответственно, h — толщина оболочки, t – время, $F_j, J_{zj}, J_{yj}, J_{kpj}$ — площадь и моменты инерции поперечного сечения j —го поперечного стержня соответственно относительно оси Oz и оси, параллельной оси Oy и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении; $\tilde{E}_j, \tilde{G}_j$ – модули упругости и сдвига материала j —го поперечного стержня соответственно, ρ_j — плотность материалов, из которых изготовлены j —й поперечный стержень, u_j, ϑ_j, w_j — компоненты вектора смещения точекосей j —го поперечного стержня, φ_j ,φ_{kpj} являются углы поворота и закручения поперечного сечения j -го стержня, через смещения оболочки выражаются следующим образом:

$$\varphi_j(y) = \varphi_2(x_j, y) = -\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\vartheta}{r}\right)\Big|_{x=x_j}; \varphi_{kpj}(y) = \varphi_1(x_j, y) = -\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=x_j}.$$

Предполагая, что основная скорость потока равна U и отклонения от этой скорости малы, воспользуемся волновым уравнением для потенциала возмущенных скоростей $\tilde{\varphi}$ по [9; 10]:

$$\Delta\tilde{\varphi} - \frac{1}{a_0^2}\left(\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial t^2} + 2U\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{R\partial x\partial t} + U^2\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial x^2}\right) = 0. \qquad (7)$$

Для описания движения внутренней вязкой жидкости используем линеаризованное уравнение Навье-Стокса для вязкой сжимаемой покоящейся жидкости [9]:

$$\rho_m\frac{\partial\vec{\vartheta}}{\partial t} = -gradp + \frac{1}{3}graddiv\vec{\vartheta} + \bar{\mu}\nabla^2\vec{\vartheta}\,, \qquad (8)$$

где $\overrightarrow{\vartheta(\vartheta_x, \vartheta_r, \vartheta_\theta)}$ — вектор скорости произвольной точки жидкости;

p — давление в произвольной точке жидкости;

ρ_m – плотность жидкости.

Выражение полной энергии системы (2), уравнение движение идеальной жидкости (7) и вязкой жидкости (8) дополняются контактными условиями. На контактной поверхности оболочки – идеальной жидкости соблюдается непрерывность радиальных скоростей и давлений. Условие непроницаемости или плавности обтекания у стенки оболочки имеет вид [9]:

$$\vartheta_r|_{r=R} = \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}\Big|_{r=R} = -\left(\omega\frac{\partial w}{\partial t} + U\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_{r=R}. \qquad (9)$$

Равенство радиальных давлений со стороны жидкости на оболочку:

$$q_{zm} = -\tilde{p}\mathrm{I}_{r=R}. \qquad (10)$$

На контактной поверхности оболочки – вязкой жидкости соблюдается непрерывность скоростей, и давлений, и касательных напряжений, т.е. при $r = R$ будет

$$\vartheta_x = \frac{\partial u}{\partial t}, \vartheta_\theta = \frac{\partial\tilde{\vartheta}}{\partial t}, \vartheta_r = \frac{\partial w}{\partial t}. \qquad (11)$$

$$q_x = -\sigma_{rx}, q_y = -\sigma_{r\theta,} q_z = -p. \qquad (12)$$

где $\sigma_{rx}, \sigma_{r\theta}$ — вязкие силы [9].

Считается, что условие жесткого контакта между оболочкой и стержнями удовлетворено:

$$u_j(y) = u(x_j, y) + h_j\varphi_1(x_j, y); \vartheta_j(y) = \vartheta(x_j, y) + h_j\varphi_2(x_j, y);$$

$$w_j(y) = w(x_j, y); \varphi_j(y) = \varphi_2(x_j, y); \varphi_{kpj}(y) = \varphi_1(x_j, y)h_j = 0{,}5h + H_j^1,$$

где H_j^1 – расстояние от осей j —го стержня до поверхности цилиндрической оболочки;

h_j — толщина j —го поперечного стержня.

Решение уравнения Навье -Стокса представим через скалярный потенциал φ и векторный потенциал $\vec{\psi}$ в виде

$$\vec{\vartheta} = grad\varphi + rot\vec{\psi}\,. \tag{13}$$

Подставляя (7) в (6), получим:

$$\rho_m \frac{\partial(grad\varphi + rot\vec{\psi})}{\partial t} = -gradp + \frac{1}{3}\mu graddiv\vec{\vartheta} + \bar{\mu}\Delta\vec{\vartheta}\,. \tag{14}$$

Из (13) легко получить, что

$$div\vec{\vartheta} = \Delta\varphi;\ graddiv\vec{\vartheta} = grad\Delta\varphi.$$

Используя векторное тождество $rotrot\vec{\vartheta} = graddiv\vec{\vartheta} - \Delta\vec{\vartheta}$, можно написать:

$$\Delta\vec{\vartheta} = graddiv\vec{\vartheta} - rotrot\vec{\vartheta} = qrad\Delta\varphi - rotrot\vec{\vartheta}.$$

Используя (7) находим:

$$rotrot\vec{\vartheta} = rotrot(grad\varphi + rot\vec{\psi}) = rotrotgrad\varphi + rot(rotrot\vec{\psi}) = \text{-}rot\Delta\vec{\psi}.$$

$$graddiv\vec{\vartheta} = \text{grad}(\Delta\varphi).$$

Подставляя эти соотношения в уравнение движения (8) найдем:

$$\rho_m \frac{\partial}{\partial t}(grad\varphi) + gradp - \frac{4}{3}\bar{\mu}grad\Delta\varphi - \bar{\mu}rot\Delta\vec{\psi} + \rho_m \frac{\partial}{\partial t}rot\vec{\psi} = 0$$

или

$$grad(\rho_m \frac{\partial\varphi}{\partial t} + p - \frac{4}{3}\bar{\mu}\Delta\varphi) + rot(-\bar{\mu}\Delta\vec{\psi} + \rho_m \frac{\partial\vec{\psi}}{\partial t}) = 0.$$

Это уравнение будет удовлетворено, если положить

$$\rho_m \frac{\partial\varphi}{\partial t} + p - \frac{4}{3}\bar{\mu}\Delta\varphi = 0. \tag{15}$$

$$-\bar{\mu}\Delta\vec{\psi} + \rho_m \frac{\partial\vec{\psi}}{\partial t} = 0. \tag{16}$$

Таким образом, частное решение уравнение (8) можно получить на основе частных решений (15) и (16). Из (9) и (10) видно, что для нахождения потенциалов φ и $\overrightarrow{\psi}$ нужно знать давление p и. Сказанное иллюстрируем на примере, когда жидкость является вязкой ньютоновской. В этом случае к системе линеаризованных уравнений Навье-Стокса (8), которое содержит пять неизвестных – три компоненты скорости $\vartheta_x, \vartheta_r, \vartheta_\theta$, давление p и плотность ρ_m прибавляются к уравнению неразрывности $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho_\text{м} div\vec{\vartheta} = 0$ и замыкающее систему уравнение, формула в виде $\frac{\partial p}{\partial\rho} = a_*^2$. В монографии [9] после некоторых преобразований получено линеаризованное волновое уравнение

$$\frac{1}{a_*^2}\frac{\partial^2 p}{\partial^2 t} = \nabla^2\left(p + \frac{4\bar{\mu}}{3\rho_m a_*^2}\frac{\partial p}{\partial t}\right) \tag{17}$$

Решение уравнения (17) имеет вид

$$p = \left(p_0 J_n(\lambda r) + \text{c}_0 Y_n(\lambda r)\right) expi(kx + n\theta + \omega t) \tag{18}$$

где $\lambda = \sqrt{\frac{\omega^2}{a_*^2\left(1 + i\frac{4\bar{\mu}\omega}{3\rho_m a_*^2}\right)} - k^2}$,

J_n, Y_n – соответственно функции Бесселя первогои второго рода порядка n,

n – число волн вдоль окружности,

k является волновым числом, или постоянной распространенной фазой, причем $k = \frac{m\pi}{L}$,
m — количество продольных волн в оболочке,
величина ω характеризует циклическую частоту волны,
$\bar{\mu}$ — динамический коэффициент вязкости,
ρ_m — плотность жидкости в невозмущенном состоянии,
a_* — скорость распространения малых возмущений в жидкости,
p_0, c_0 – постоянные.

Считая функцию p ограниченной при $r \to 0$, находим $c_0 = 0$, и тогда окончательно

$$p = p_0 J_n(\lambda r)\, exp i(kx + n\theta + \omega t). \tag{19}$$

Из (15) для нахождения φ получим уравнение

$$\Delta\varphi - \frac{3\rho_m}{4\bar{\mu}}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = p_0 J_n(\lambda r) exp i(kx + n\theta + \omega t)\,. \tag{20}$$

Решение однородного уравнения (20), имеет вид:

$$\varphi = C_1 I_n(\tilde{k}r) + C_2 K_n(\tilde{k}r),$$

где $\tilde{k} = \sqrt{k^2 + \frac{3i\omega\rho_m}{4\bar{\mu}}}$, $I_n(\tilde{k}r), K_n(\tilde{k}r)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка n соответственно;
C_1, C_2 – постоянные.

С помощью способа вариации постоянных решение уравнения можно написать в виде

$$\varphi(r) = p_0 f(r) + \mu_1 \dot{\mathrm{I}}_n(\tilde{k}r), \tag{15}$$

где

$$\Delta(r) = \dot{\mathrm{I}}_n(\tilde{k}r) K_n'(\tilde{k}r) - \dot{\mathrm{I}}_n'(\tilde{k}r) K_n(\tilde{k}r).$$

$$f(r) = -\dot{\mathrm{I}}_n(\tilde{k}r)\int_r^R \Delta^{-1}(\xi) J_n(\lambda\xi) K_n(\tilde{k}\xi)\, d\xi + K_n(\tilde{k}r)\int_0^r \Delta^{-1}(\xi) J_n(\lambda\xi)\dot{\mathrm{I}}_n(\tilde{k}\xi)\, d\xi.$$

Уравнение относительно компонентов вектора $\vec{\psi}(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ имеет вид

$$\overrightarrow{\Delta\psi} = \frac{\rho_m}{\bar{\mu}}\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial t}$$

или

$$\psi_i''(r) + \frac{1}{r}\psi_i'(r) - \left(k^2 + \frac{i\omega\rho_m}{\bar{\mu}} + \frac{n^2}{r^2}\right)\psi_i(r) = 0 \tag{22}$$

Решение уравнения (22) соответствующей рассмотренной задаче имеет вид:

$$\psi_1 = \mu_2 J_n(qr)\ ;\ \psi_2 = \mu_3 J_n(qr);\ \psi_3 = \mu_4 J_n(qr). \tag{23}$$

Здесь $q = \sqrt{k^2 + \frac{i\omega}{\bar{\mu}}}$.

Используя (6), (11) и (13) для компонентов вектора скорости получим:

$$v_x = \left[-\frac{k\omega}{\rho_{\text{м}} a_*^2} p_0 f(r) + ikJ_n(kr)\mu_1 + inJ_n(qr)\mu_4 - qJ_n'(qr)\mu_3\right] \times$$
$$\times\, exp i(kx + n\theta + \omega t) \tag{24}$$
$$v_\theta = \left[-\frac{n\omega}{\rho_{\text{м}} a_*^2} p_0 f(r) + inJ_n(kr)\mu_1 + ikJ_n(qr)\mu_4 - qJ_n'(qr)\mu_2\right] \times$$
$$\times\, exp i(kx + n\theta + \omega t)$$

$$v_r = \left[\frac{i\omega}{\rho_{\text{м}} a_*^2} p_0 f'(r) + kJ_n'(kr)\mu_1 + ikJ_n(qr)\mu_3 - inJ_n(qr)\mu_2\right] \times$$
$$\times\, expi(kx + n\theta + \omega t)$$

С помощью формулы силы вязкости [9] находим:

$$\sigma_{rx} = \bar{\mu}\Big[-\tfrac{2k\omega}{\rho_{\text{м}} a_*^2} f'(r)p_0 + 2ik^2 J_n'(kr)\mu_1 + nkJ_n(qr)\mu_2 - (k^2 J_n(qr) - J_n''(qr)]\mu_3 +$$
$$+ inqJ_n'(qr)\mu_4\big] expi(kx + n\theta + \omega t).$$
$$\sigma_{r\theta} = \bar{\mu}\Big[-\tfrac{2n\omega}{R\rho_{\text{м}} a_*^2} f'(r)p_0 + \tfrac{2ink}{R} J_n'(kr)\mu_1 + \big(n^2 J_n(qr) - q^2 + J_n''(qr)\big)\mu_2 - nkJ_n(qr)\mu_3 +$$
$$+ ikqJ_n'(qr)\mu_4\big] expi(kx + n\theta + \omega t). \tag{25}$$
$$\sigma_{rr} = p_0 J_n(\lambda r) expi(kx + n\theta + \omega t).$$

Используя контактные условия (12) и выражения (25), находим силы q_x, q_y, q_{z1}, действующие со стороны вязкой жидкости на оболочку

$$q_x = \bar{\mu}\Big[-\tfrac{2k\omega}{\rho_{\text{м}} a_*^2} f'(R)p_0 + 2ik^2 J_n'(kR)\mu_1 + nkJ_n(qR)\mu_2 - (k^2 J_n(qR) - J_n''(qR)]\mu_3 +$$
$$+ inqJ_n'(qR)\mu_4\big] expi(kx + n\theta + \omega t); \tag{26}$$
$$q_{z1} = p_0 J_n(\lambda R) expi(kx + n\theta + \omega t);$$
$$q_y = \bar{\mu}\Big[-\tfrac{2n\omega}{R\rho_{\text{м}} a_*^2} f'(R)p_0 + \tfrac{2ink}{R} J_n'(kR)\mu_1 + \big(n^2 J_n(qR) - q^2 J_n''(qR)\big)\mu_2 - nkJ_n(qR)\mu_3 +$$
$$+ ikqJ_n'(qR)\mu_4\big] expi(kx + n\theta + \omega t).$$

Смещение точек оболочки будем искать в виде

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} u_{0mn} expi(k_m x + n\theta + \omega t).$$
$$\vartheta = \sum_{m=1}^{\infty} \vartheta_{0mn} expi(k_m x + n\theta + \omega t). \tag{27}$$
$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_{0mn} expi(k_m x + n\theta + \omega t).$$

Здесь $u_{0mn}, \vartheta_{0mn}, w_{0mn}$ – неизвестные постоянные, $k_m = \frac{m\pi}{l}$.

Контактные условия (11) дают систему алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных $p_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, u_{0mn}, \vartheta_{0mn}, w_{0mn}$. Эта система позволяет постоянные p_0, μ_3 и μ_4 выразить через постоянные $\mu_1, \mu_2, u_{0mn}, \vartheta_{0mn}, w_{0mn}$ и имеет вид:

$$-\frac{k\omega}{\rho_{\text{м}} a_*^2} f(R)p_0 - qJ_n'(qR)\mu_3 + inJ_n(qR)\mu_4 = -ikJ_n(kR)\mu_1 + i\omega u_{0mn}.$$
$$-\frac{n\omega}{\rho_{\text{м}} a_*^2} f(R)p_0 + ikJ_n(qR)\mu_4 = -inJ_n(kR)\mu_1 + qJ_n'(qR)\mu_2 + i\omega\vartheta_{0mn}. \tag{28}$$
$$\frac{i\omega}{\rho_{\text{м}} a_*^2} f'(R)p_0 + ikJ_n(qr)\mu_3 = -kJ_n'(kr)\mu_1 + inJ_n(qr)\mu_2 + i\omega w_{0mn}.$$

Из этой системы можно написать:

$$p_0 = \Delta^{-1}[\Delta_{11}\mu_1 + \Delta_{12}\mu_2 + \Delta_{13}u_{0mn} + \Delta_{14}\vartheta_{0mn} + \Delta_{15}w_{0mn}]$$
$$\mu_3 = \Delta^{-1}[\Delta_{21}\mu_1 + \Delta_{22}\mu_2 + \Delta_{23}u_{0mn} + \Delta_{24}\vartheta_{0mn} + \Delta_{25}w_{0mn}]$$
$$\mu_4 = \Delta^{-1}[\Delta_{31}\mu_1 + \Delta_{32}\mu_2 + \Delta_{33}u_{0mn} + \Delta_{34}\vartheta_{0mn} + \Delta_{35}w_{0mn}]$$

где Δ – главный определитель,

$\Delta_{ij}(i = 1,2,3; j = 1,2,\ldots,5)$ – определители, полученные из вспомогательных определителей системы (28).

Учитывая эти формулы в (20) получим выражение для q_x, q_y, q_{z1}. Можно вычислить работу A_n, совершаемую этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное.

Потенциал возмущенных скоростей $\tilde{\varphi}$ ищем в виде:

$$\tilde{\varphi}(x, r, \theta, t) = f(r) expi(kx + n\theta + \omega t). \tag{29}$$

Используя (30), из уравнения (7) имеем [9; 10]:

$$\tilde{\varphi} = -\phi_{\alpha n}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + U\frac{\partial w}{\partial x}\right). \tag{30}$$

$$\tilde{p} = \phi_{\alpha n}\rho_*\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2U\frac{\partial^2 w}{R\partial x\partial t} + U^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \tag{31}$$

где

$$\phi_{\alpha n} = \begin{cases} \dfrac{K_n(\beta r)}{K_n'(\beta R)}, M_1 < 1 \\ \dfrac{N_n(\beta r)}{N_n'(\beta R)}, M_1 > 1 \\ \dfrac{r^n}{nR^{n-1}}, M_1 = 1 \end{cases}$$

Здесь $M_1 = \frac{U+\frac{\omega R}{k}}{a_0}, \beta^2 = R^{-2}(1 - M_1^2)k^2, \beta_1^2 = R^{-2}(M_1^2 - 1)k^2 K_n -$ модифицированная функция Бесселя второго рода порядка n;

$N_n -$ функции Неймана первого порядка n;

$\rho_* -$ плотность жидкости.

Исходя из условия (10), будем иметь, используя (31)

$$q_{zm} = \tilde{\phi}_{\alpha n}\rho_*\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2U\frac{\partial^2 w}{R\partial x\partial t} + U^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{32}$$

где ,$\tilde{\phi}_{\alpha n} = \phi_{\alpha n}|_{r=R}$.

Можно вычислить работу A_m, совершаемую q_z при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное.

Подставим аппроксимации (27) в функционал $\Pi(2)$ и, учитывая, что в этом функционале $x_1 = 0, x_2 = l, y_1 = 0, y_2 = 2\pi t' = 0, t'' = \frac{\pi}{\omega}$, проинтегрируем по x, y и t. Тогда вместо функционала Π получаем функцию W от искомых величин $\mu_1, \mu_2, u_{0mn}, \vartheta_{0mn}, w_{0mn}$. Стационарное значение полученной функции определяется следующей линейной системой уравнений:

$$\frac{\partial W}{\partial u_{0mn}} = 0; \frac{\partial W}{\partial \vartheta_{0mn}} = 0; \frac{\partial W}{\partial w_{0mn}} = 0; \frac{\partial W}{\partial \mu_3} = 0; \frac{\partial W}{\partial \mu_4} = 0 (33).$$

Так как система (33) является однородной системой линейных алгебраических уравнений, необходимым и достаточным условием существования ее ненулевого решения является равенство ее главного определителя нулю. В результате получаем следующее частотное уравнение:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12}\varphi_{13} & \varphi_{14} & \varphi_{15} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22}\varphi_{23} & \varphi_{24} & \varphi_{25} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32}\varphi_{33} & \varphi_{34} & \varphi_{35} \; =0 \\ \varphi_{41} & \varphi_{42}\varphi_{43} & \varphi_{44} & \varphi_{45} \\ \varphi_{51} & \varphi_{52}\varphi_{53} & \varphi_{54} & \varphi_{55} \end{vmatrix} \qquad (34)$$

где $\varphi_{ij}(i,j=1,2,3)$ являются коэффициентами при неизвестных $u_{0mn}, \vartheta_{0mn}, w_{0mn}, \mu_1, \mu_2$ в системе (33).

Уравнение (34) был рассчитан численным методом. За параметры, содержащиеся в решении задачи, были приняты:

$\tilde{b}_{11} = 18{,}3\text{ГПа}$, $\tilde{b}_{12} = 2{,}77\text{ГПа}$, $\tilde{b}_{22} = 25{,}2\text{ГПа}$, $\tilde{b}_{66} = 3{,}5\ \text{ГПа}$, $\tilde{\rho} = \rho_j = 1850\ \text{кг/м}^3$, $\tilde{E}_j = 6{,}67\cdot 10^9 \text{Н/м}^2 m = 1; n = 8;\ h_j = 1{,}39;\ R = 160\ \text{см}; \alpha = 0{,}4; I_{\text{кр}j} = 0{,}48\ \text{мм}^4; I_{xj} = 19{,}9\ \text{мм}^4; F_j = 0{,}45\ \text{мм}^2; h = 0{,}45\ \text{мм}. \nu_1 = \nu_2 = 0{,}35; \frac{l}{R} = 3, \frac{h}{R} = \frac{1}{6}. U = 4\frac{\text{м}}{\text{сек}};\ \rho_m = 1000\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; f_1(z) = 1 + \alpha\frac{z}{l}, f_2(x) = 1 + \beta\frac{x}{l}$.

Результаты расчетов были приведены на рисунке 2 в виде зависимостей параметра частоты от количества подкрепляющих поперечных стержней k_2 на поверхности оболочки, на рисунке 3 в виде зависимости частотного параметра от параметра неоднородности в направлении образующей оболочки β, на рисунке 4 в виде зависимости частотного параметра от скорости течения идеальной жидкости U. На рисунках пунктирным кривым соответствуют колебания поперечно подкрепленной, заполненной вязкой жидкостью цилиндрической оболочки в бесконечной идеальной жидкости, а сплошными кривыми – колебания поперечно подкрепленной цилиндрической оболочки в бесконечной идеальной жидкости. Из рисунков видно, что наличие вязкой жидкости приводит к снижению значения собственных частот колебаний системы по сравнению с частотой колебаний системы без вязкой жидкости. Как видно из рисунка 2, с увеличением числа поперечных ребер значение параметра частоты увеличивается. По мере увеличения параметра неоднородности в направлении образующей оболочки β, как видно из рисунка 3, значение параметра частоты увеличивается. Кроме того, значение частотного параметра возрастает с возрастанием ортотропных свойств цилиндрической оболочки и уменьшается с увеличением скорости течения жидкости (рис. 4).

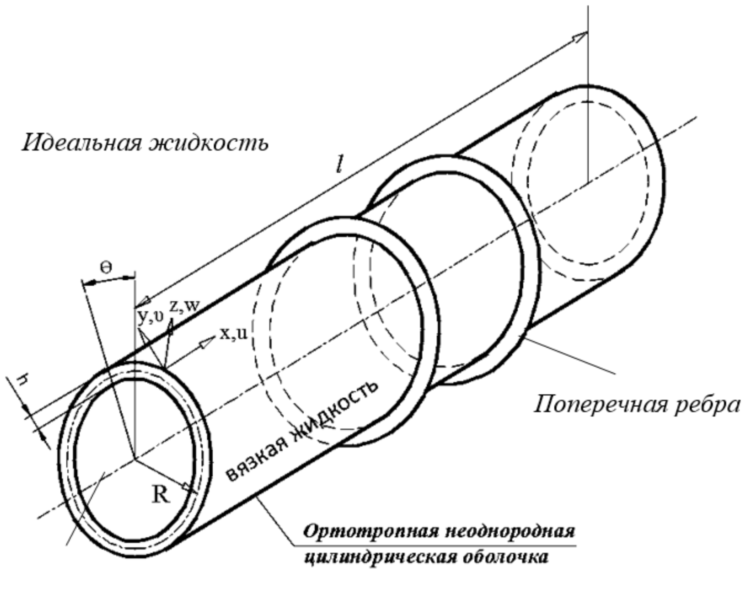

Рис. 1. Поперечно подкрепленная неоднородная цилиндрическая оболочка

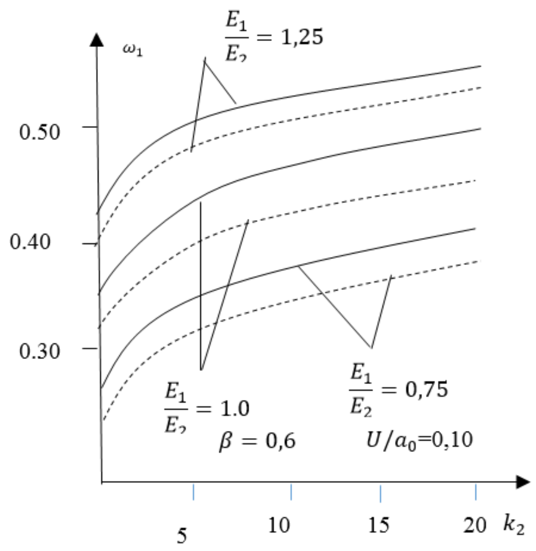

Рис. 2. Зависимость частотного параметра от числа поперечных ребер k_2

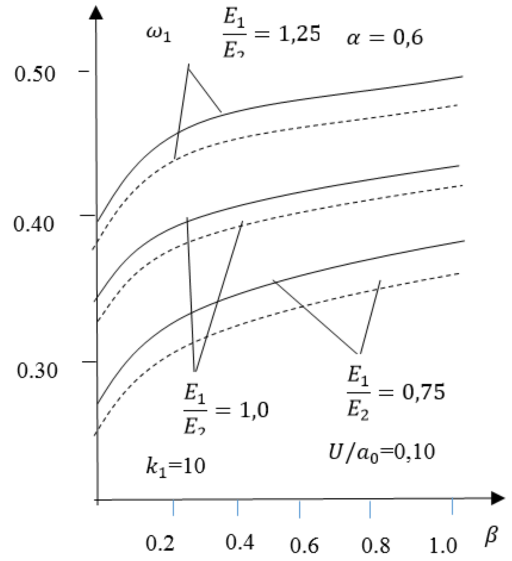

Рис. 3. Зависимость частотного параметра от параметра неоднородности в продольном направлении β

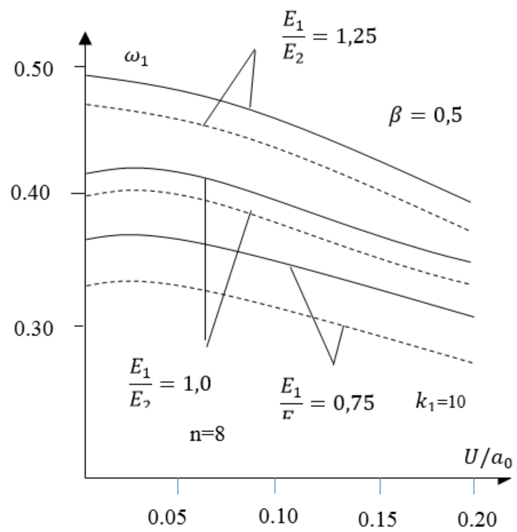

Рис. 4. Зависимость частотного параметра от скорости течения идеальной жидкости U/a_0

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ализаде Н.И. Колебание неоднородной ортотропной, подкрепленной кольцевыми ребрами цилиндрической оболочки при динамическом взаимодействии с грунтом. Теоретическая и прикладная механика. – Баку, 2010.

2. Latifov F.S., Yusifov M.Z, Alizade N. Free vibrations of heterogeneous orthotropic cylindrical shells reinforced by annular ribs and filled by fluid // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2020. – Vol. 61. – № 3. – P. 486–493.

3. Latifov F.S., Alıyev Ş.Ş., Seifullaev F.A. Free vibrations of an anisotropic cylindrical fiberglass shell reinforced by annular ribs and containing fluid flow // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2016. – Vol. 57. – № 4. – P. 709–713.

4. Ganiyev D.S. Free Vibrations of a Vertical Support Consisting of Three Orthotropic, Viscous-Elastic SoilContacting Cylindrical Panels to be Stiffened with Longitudinal Ribs // International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering (IJTPE). – 2020. – Issue 42. – Vol. 12. – № 1. – P. 63–67.

5. Nematli A.I. Free Orthotropic Viscous-Elastic and Medium-Contacting Cylindrical Shell Strengthened with Rings and Elastic Symmetry Axis Forms of Angle with Coordinate Axis // International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering (IJTPE). – 2019. – Issue 41. – Vol. 11. – № 4. – P. 11–15.

6. Badirov Z.M. Vibrations of an Anisotropic Laterally Stiffened Fluid Filled Cylindrical Shell Inhomogeneous in Thickness and Circumference // International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering (IJTPE). – 2020. – Issue 42. – Vol. 12. – № 1. – P. 73–77.

7. Ломакин В.А. Теория неоднородных тел. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 355 с.

8. Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Поляков П.С. Ребристые цилиндрические оболочки. – Киев: Наук. думка, 1973. – 248 с.

9. Вольмир С.А. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. – М.: Наука, 1976. – 416 с.

10. Латифов Ф.С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой. – Баку: Элм, 1999. – 164 с.

Seyfullayev F.A.
research associate

Institute of Mathematics and Mechanics
NAN of Azerbaijan
Azerbaijan, Baku

Musayev C.E.
research associate

Azerbaijan University of Architecture and Civil Engineering
Azerbaijan, Baku

AXIALLY-SYMMETRIC FORM OF LATERAL VIBRATION OF A NON-HOMOGENOUS CYLINDRICAL SHELL LYING ON VISCOUS-ELASTIC FOUNDATION

The paper deals when lateral vibration of a non-homogeneous cylindrical shell of circular section and lying on a linear viscous-elastic foundation. It is assumed that the modulus of elasticity and density are continuous functions of the thickness coordinate.

For the case when the end faces of the shell are freely supported, under specific forms of non-homogeneity we carry out numerical analysis. The results of calculations are represented in the form of tables and graphs of dependence between the dimensionless frequency quantity and non-homogeneity parameter.

Key words: *shell, non-homogeneity, section, elasticity, viscosity, foundation, modulus, deflection.*